数 問

数　　　　学

令 和 7 年 度（後期）

注　　　意

1. 「解答はじめ」というまで，この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文2ページ，白紙2枚），解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

　（例）　受験番号 80001 番の場合 ⟶

8	0	0	0	1

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1　以下の問いに答えよ。

(1) 整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，ab は 4 の倍数であることを示せ。

(2) 3 辺の長さがすべて整数で，そのうちの 1 辺の長さが 2025 である直角三角形の面積は 162 の倍数であることを示せ。

2　$f(x)=x^3$ とする。また k を実数とする。4 点 $\bigl(k-1,\ f(k-1)\bigr)$，$\bigl(k+1,\ f(k-1)\bigr)$，$\bigl(k+1,\ f(k+1)\bigr)$，$\bigl(k-1,\ f(k+1)\bigr)$ を頂点とする長方形の面積を S とし，この長方形の中で $y=f(x)$ のグラフの下側にある部分の面積を T とする。

$$m=\frac{T}{S}$$

の最大値と，そのときの k の値を求めよ。

3　平面上に △OAB がある。辺 AB 上の点 M，N が

$$\angle \mathrm{AOM}=\angle \mathrm{MON}=\angle \mathrm{NOB}=\frac{1}{3}\angle \mathrm{AOB},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ :\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ :\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ =\ 1:2:3$$

を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

4 数直線上の原点 0 に置かれた点 P に対し，次のような試行を考える。

硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を -1 だけ移動させる，という操作を繰り返す。P が 3 または -2 に移動したとき，もしくは P を移動させた回数が 7 回になったとき，終了する。

(1) この試行において，P をちょうど 4 回移動させる確率を求めよ。

(2) この試行を終了したときに，P が 3 にある確率を求めよ。

(3) この試行において，P を 7 回移動させる確率を求めよ。

5 次の［Ⅰ］，［Ⅱ］のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

［Ⅰ］ t を実数とし，座標平面において

$$x^2+y^2-1-t(4x+2y-10)=0$$

で表される図形 C を考える。C が半径 1 以上 4 以下の円となるように t が動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

［Ⅱ］ 以下の問いに答えよ。

(1) n を 0 以上の整数とし，

$$a_n=\int_0^1 \frac{t^{4n}}{t^2+1}\,dt$$

とする。$a_{n+1}-a_n$ を n で表せ。

(2) 正の整数 n について

$$0<\pi-\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{(4k-3)(4k-1)}<\frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ。