数 問

数　　　学

令 和 7 年 度（前期）

注　　意

1. 「解答はじめ」というまで，この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊（本文 2 ページ，白紙 2 枚），解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので，引き抜いて下書用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例）　受験番号 80001 番の場合 ⟶

8	0	0	0	1

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1　正の整数 n に対し，n の正の約数の個数を $d(n)$ とする。たとえば，6 の正の約数は 1，2，3，6 の 4 個なので，$d(6) = 4$ である。また，

$$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt{n}}$$

とする。

(1) $f(2025)$ を求めよ。

(2) 素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ。

(3) $f(n)$ の最大値と，そのときの n を求めよ。

2　座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある。また，直線 $x = 2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つような P の y 座標の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つとき，その 2 つの共有点を通る直線を ℓ とする。ℓ に関して P と対称な位置にある点を Q とする。ただし，P が ℓ 上にあるときは Q = P とする。P の y 座標が (1) で求めた範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ。

3　等式

$$6\int_0^2 \left|x^2 - a\right| dx \;=\; a^2 - 2a + k$$

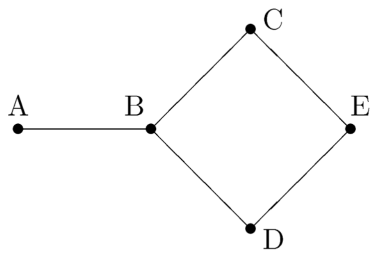
が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ。

4　原点を O とする座標空間内の 2 点 A (0, 3, −5), B (5, −2, 10) に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}, \quad s \geqq 0, \quad \frac{1}{5} \leqq t \leqq \frac{3}{5}$$

で定まる点 P が存在する範囲を D とする。D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち，その中心と原点との距離が最小となるものを C とする。円 C の中心の座標を求めよ。

5　5 点 A，B，C，D，E が下図のように線分でむすばれている。点 P_1，P_2，P_3，$\cdots$ を次のように定めていく。P_1 を A とする。正の整数 n に対して，P_n を端点とする線分をひとつ無作為にえらび，その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする。



(1) P_n が A または B である確率 p_n を求めよ。

(2) P_n が A または B であるとき，$k = 1, 2, \cdots, n$ のいずれに対しても $\mathrm{P}_k = \mathrm{E}$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ。