数 問

数　　学

令 和 6 年 度（後期）

注　　意

1.「解答はじめ」というまで，この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文2ページ，白紙2枚），解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例）　受験番号80001番の場合 ⟶

8	0	0	0	1

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 $m^2 - n^2 = 10!$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ の個数を求めよ。

2 $a,\ b,\ c$ を実数，m を整数とする。3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が次の 2 つの条件を満たすとき，$a,\ b,\ c,\ m$ の値を求めよ。

- すべての実数 p に対して $\displaystyle\int_p^{p+1} f(x)dx = (p-m)^3$ が成り立つ。
- $f(x)$ は $-2 < x < -1$ に極値をもつ。

3 点 P はさいころを投げるごとに三角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}$ の頂点を動くものとする。初め P は点 $\mathrm{A_1}$ にある。P が点 A_t $(t = 1,\ 2,\ 3)$ にあるとき，P は出た目によって次のように動く。

- 出た目 s が $t,\ 4,\ 5,\ 6$ のいずれかであるとき，P は点 A_t にとどまる。
- 出た目 s が $t,\ 4,\ 5,\ 6$ のいずれでもないとき，P は点 A_s に移動する。

さいころを k 回目に投げた直後の点 P の位置を P_k とする。以下，n を 2 以上の整数とする。

(1) $k = 1, 2, \cdots, n-1$ のいずれに対しても $\mathrm{P}_k = \mathrm{A_2}$ とはならず，かつ $\mathrm{P}_n = \mathrm{A_2}$ となる確率を求めよ。

(2) $k = 1, 2, \cdots, n$ のなかで $\mathrm{P}_k = \mathrm{A_2}$ となる k が 2 つ以下となる確率を求めよ。

4 　a を正の実数とし，xy 平面上の直線 L_1，L_2，L_3 をそれぞれ

$$L_1 : y = a, \qquad L_2 : y = x, \qquad L_3 : y = -x$$

とする。また，b を実数とし，円 C を

$$C : x^2 + (y-b)^2 = 1$$

とする。直線 L_1，L_2，L_3 のすべてが円 C と共有点をもち，かつその共有点の総数が 3 となるときの a，b の組を求めよ。

5 　次の［Ⅰ］,［Ⅱ］のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

［Ⅰ］　数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n \geqq 1)$ を満たしている。a_{2024} を 13 で割った余りを求めよ。

［Ⅱ］　以下の問いに答えよ。

(1)　任意の実数 x，y に対して

$$e^x \geqq (x-y+1)e^y$$

が成り立つことを示せ。

(2)　n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n について

$$\frac{e^{a_1} + e^{a_2} + \cdots + e^{a_n}}{n} \geqq e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$$

を示せ。

(3)　n 個の正の実数 b_1，b_2，$\cdots$，b_n について

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geqq \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

を示せ。