数 問

数　　　　学

令 和 5 年 度(後期)

注　　　意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊（本文 2 ページ，白紙 2 枚），解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

　(例)　受験番号 90001 番の場合 ⟶

9	0	0	0	1

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1　$\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{2023}$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ の個数を求めよ。

2　x を正の実数とする。空間内に互いに外接しあう3つの球 S_1，S_2，S_3 があり，それぞれの半径は 1，x，x^2 である。また，これらは同一の平面 P にそれぞれ点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_3}$ で接している。$\angle \mathrm{A_1A_2A_3}$ の大きさを $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，θ のとり得る値の範囲を求めよ。

3　平面上に相異なる4点 A，B，C，D がある。動く点 P が，時刻 n において，これらのいずれかの点にあるとき，時刻 $n+1$ にどの点にあるかを定める確率が下の表で与えられている。たとえば，P が時刻 n に B にあるとき，時刻 $n+1$ に D にある確率は $\dfrac{1}{2}$ である。

n ＼ $n+1$	A	B	C	D
A	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

(1)　時刻1に P が C にあるとき，時刻3に P が B にある確率を求めよ。

(2)　時刻1に P が A にあるとき，時刻 n に P が B にある確率を求めよ。

4　a を実数とする。曲線 $C: y = \dfrac{1}{3}x^3 - ax$ 上の点 P における C の接線 ℓ が，P と異なる点 Q において C と交わり，かつ Q における C の接線が ℓ と直交する。このような P が存在しうる a の値の範囲を求めよ。

5　次の［Ⅰ］，［Ⅱ］のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

［Ⅰ］　数列 $\{a_n\}$ がすべての正の整数 n について次の条件を満たしている。

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 a_k = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1)}{60}$$

$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

［Ⅱ］　以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan\dfrac{\pi}{12}$ を求めよ。

(2)　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，$x \geqq \tan x - \dfrac{\tan^3 x}{3}$ を示せ。

(3)　$\pi > 3.1$ を示せ。