

# 数 問

## 数 学

### 令和 3 年 度(前期)

#### 注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊（本文 2 ページ，白紙 2 枚），解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

(例) 受験番号 50001 番の場合 → 

5	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

**1** 1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ。

**2** 実数  $x$  に対し、 $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  で表す。数列  $\{a_k\}$  を

$$a_k = 2^{\lceil \sqrt{k} \rceil} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。正の整数  $n$  に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ。

**3** 次の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  を実数とし、2 次方程式  $x^2 - ax + b = 0$  が実数解  $\alpha, \beta$  をもつとする。ただし、重解の場合は  $\alpha = \beta$  とする。3 辺の長さが 1,  $\alpha, \beta$  である三角形が存在する  $(a, b)$  の範囲を求め図示せよ。
- (2) 3 辺の長さが 1,  $\alpha, \beta$  である三角形が存在するとき、

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2}$$

の値の範囲を求めよ。

**4**  $k > 0$  とする。円  $C$  を  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  とし、放物線  $S$  を  $y = \frac{1}{k}x^2$  とする。

- (1)  $C$  と  $S$  が共有点をちょうど 3 個持つときの  $k$  の範囲を求めよ。
- (2)  $k$  が (1) の範囲を動くとき、 $C$  と  $S$  の共有点のうちで  $x$  座標が正の点を  $P$  とする。 $P$  における  $S$  の接線と  $S$  と  $y$  軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。

**5** サイコロを 3 回投げて出た目を順に  $a, b, c$  とするとき、

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx = 0$$

となる確率を求めよ。